TD: Composition des mouvements

Exercice 1:

Un petit avion se déplace dans une direction nord-est à la vitesse de 125km/h par rapport au sol, à cause d'un vent d'ouest de 50km/h par rapport au sol. A quelle vitesse et dans quelle direction volerait cet avion s'il n'y avait pas de vent?

Exercice 2: Tige en rotation uniforme

Dans un plan fixe OXY, une tige OA tourne autour de OZ avec une vitesse angulaire constante w. Un mobile M se déplace sur cette tige suivant la loi $r = r_0(\cos(\omega t) + \sin(\omega t))$, r_0 une constante.

1. Exprimer la vitesse absolue de M, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement. Exprimer le module de V_a et sa direction à t=0.
2. Exprimer les accélérations relative, d'entraînement et de coriolis. En déduire l'accélération absolue.

Exercice 3: Mouvement d'un point du périmètre d'un disque

Un disque de rayon r tourne uniformément autour de son axe, à la vitesse angulaire w, dans le sens indiqué sur la figure 1. Son centre C se déplace sur la droite horizontale z = r du plan vertical OZX du référentiel R=OXYZ. On appelle R* le référentiel CXYZ, en translation par rapport à R, d'origine C, et on note θ l'angle que fait un rayon CA du disque avec CZ, A étant un point de la périphérie.

1. Exprimer, dans la base de R, la vitesse et l'accélération de A par rapport à R*.
2. Quelle vitesse, par rapport à R, doit-on donner à C pour que la vitesse $\mathbf{V}_{B/R}$ du point le plus bas du disque soit nulle?
3. Déterminer $dx/d\theta$ et $dz/d\theta$, en déduire les équations $x= x(\theta)$ et $z= z(\theta)$ du point A, sachant que pour $\theta=0$, x=0 et z=2R.
4. Calculer la longueur curviligne s parcourue par A lorsqu'il rencontre l'axe OX pour la 1ere fois.

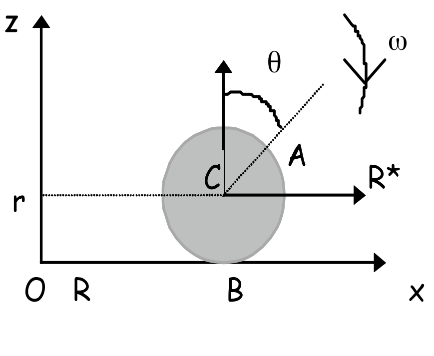

Figure 1

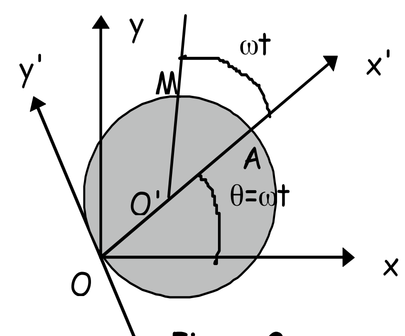

Figure 2

Exercice 4: Mouvement d'un point M sur la circonférence d'un cercle en rotation uniforme

Dans le plan XOY du référentiel $\mathcal{R}$ (O, **i**, **j**, **k**), un cercle de diamètre 2R tourne à la vitesse angulaire ω=cte autour de O (figure 2). On lie à son centre O' le système d'axe (O', X', Y') de vecteurs unitaires **i'**, **j'**. Z et Z' sont confondus, OX' est dirigé suivant OA. A t=0 A est sur OX. Un point M initialement sur A parcourt la circonférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω.

1. Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération du point M dans le référentiel $\Re$: $\vec{v}\,(M,\Re)$; $\vec{a}\,(M,\Re)$, exprimer ces vecteurs dans la base (**i**, **j**, **k**).
2. Calculer les composantes de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement dans $\Re$' ainsi que les composantes des accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis $\vec{a}_{relative}$, $\vec{a}_{entrainement}$ et $\vec{a}_{coriolis}$, ces vitesses et accélérations seront exprimées dans les deux bases: (**i**, **j**, **k**) et (**i'**, **j'**, **k**).
3. Retrouver la vitesse absolue à partir de la question 2 dans la base (**i**, **j**, **k**), ainsi que l'accélération absolue à partir de la question 2 dans la base (**i**, **j**, **k**).

Exercice 5: Composition de deux mouvements circulaires

Un point A se déplace le long d'un cercle, de rayon R, qui tourne uniformément autour d'un diamètre vertical (figure 3). On note θ l'angle (OZ, **OA**) qui situe le point sur le cercle et $d\alpha/dt=\omega$ la vitesse angulaire du cercle.

1. Exprimer en fonction de θ, la vitesse et l'accélération de A par rapport à $\mathcal{R}$'=(Ox'y'z) dans la base ($\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$)..
2. Ecrire, dans la base de $\mathcal{R}$', la vitesse d'entraînement, l'accélération d'entraînement et l'accélération de Coriolis.
3. En déduire la vitesse et l'accélération de A par rapport à $\mathcal{R}$, exprimées dans la base de $\mathcal{R}$'. Retrouver ces résultats directement à partir des composantes de **OA** dans la base de $\mathcal{R}$'.

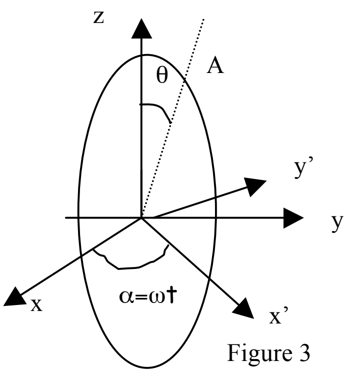

Figure 3

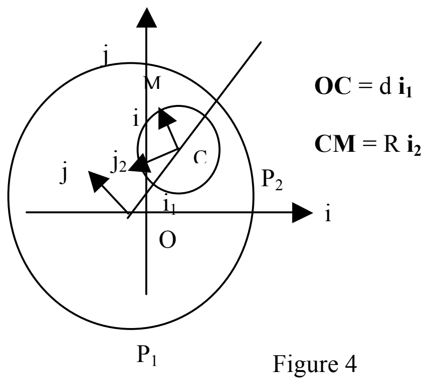

Figure 4

Exercice 6 ::Rotation sur un plateau tournant

Par rapport au référentiel terrestre R, un plateau horizontal P_1 tourne avec une vitesse angulaire constante ω_1 autour de l'axe (Oz). C un point fixe par rapport au plateau, situé à une distance d du point O.

Un second plateau circulaire P_2, de rayon R, tourne autour de l'axe (Cz) avec une vitesse angulaire constante ω_2 par rapport à P_1 (figure 4).

Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération par rapport à R d'un point M de la circonférence de P_2.

On utilisera les bases orthonormées ($\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$) et ($\mathbf{i}_2$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{k}_2$).

Réponses :

1. v (avion)=96.38 kmh^{-1} ; θ=66°

2.1. i'vecteur colinéaire à la tige, $\vec{j'} \perp \vec{i'}, \left\|\vec{i'}\right\| = \left\|\vec{j'}\right\| = 1$ $\vec{V_r} = r_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t)\ \vec{i'}$; $\vec{V_e} = r_0\omega(\cos\omega t + \sin\omega t)\ \vec{j'}$

2.2. $\vec{a_r} = -r_0\omega^2\ (\cos\omega t + \sin\omega t)\ \vec{i'} = -r\ \omega^2\ \vec{i'} = \vec{a_e}$; $\vec{a_c} = 2r_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t)\ \vec{j'}$

3.1. $\vec{V}(A/R^*) = R\omega\ \vec{u_\theta} = R\omega\ (\cos\theta\ \vec{u_x} - \sin\theta\ \vec{u_z})$; $\vec{a}(A/R^*) = -R\omega^2\ \vec{u_r} = -R\omega^2\ (-\sin\theta\ \vec{u_x} - \cos\theta\ \vec{u_z})$; 3.2. $\left\|\vec{V}(C/R)\right\| = R\omega$;

3.3. $x(\theta) = R(\theta + \sin\theta)$; $z(\theta) = R(1 + \cos\theta)$; $s = 4R$

4. $\vec{V}(M/R') = R\omega(-\sin\omega t\ \vec{i'} + \cos\omega t\ \vec{j'}) = R\omega(-\sin 2\omega t\ \vec{i} + \cos 2\omega t\ \vec{j})$; $\vec{a}(M/R') = -R\omega^2(\cos\omega t\ \vec{i'} + \sin\omega t\ \vec{j'})$;

$\vec{a}(M/R') = -R\omega^2(\cos 2\omega t\ \vec{i} + \sin 2\omega t\ \vec{j})$; $\vec{V}_e = R\omega(-\sin\omega t\ \vec{i'} + (\cos\omega t + 1)\ \vec{j'}) = R\omega\left[(-\sin\omega t - \sin 2\omega t)\ \vec{i} + (\cos\omega t + \cos 2\omega t)\ \vec{j})\right]$,

$\vec{a}_e = -R\omega^2\left[(\cos\omega t + \cos 2\omega t)\ \vec{i} + (\sin\omega t + \sin 2\omega t)\ \vec{j}\right]$; $\vec{a}_c = -2R\omega^2(\cos 2\omega t\ \vec{i} + \sin 2\omega t\ \vec{j})$

5.1. $\vec{V}(A/R') = R\dot{\theta}\vec{T}$; $\vec{a}(A/R') = R\dot{\theta}^2\ \vec{N}$; 5.2. $\vec{V}_e = R\omega\sin\theta\ \vec{j'}$; $\vec{a}_e = -\omega^2\ \vec{HA} = -R\omega^2\sin\theta\ \vec{i'}$; $\vec{a}_c = 2\omega\cos\theta\ \dot{\theta}\ \vec{j'}$

$\vec{V}(A/R) = R\dot{\theta}\cos\theta\ \vec{i'} + R\omega\sin\theta\ \vec{j'} - R\dot{\theta}\sin\theta\ \vec{k'} = \vec{V}(A/R') + \vec{V}_e$;

$\vec{a}(A/R) = \vec{a}(A/R') + \vec{a}_e + \vec{a}_c = (-R\omega^2\sin\theta - R\dot{\theta}^2\sin\theta + R\ddot{\theta}\cos\theta)\ \vec{i'} + 2\omega\cos\theta\ \dot{\theta}\ \vec{j'} + (-R\dot{\theta}^2\cos\theta - R\ddot{\theta}\sin\theta)\ \vec{k'}$;

6. $\vec{V}(M/R) = R(\omega_1 + \omega_2)\ \vec{j_2} + \omega_1\ d\ \vec{j_1}$; $\vec{a}(M/R) = -R(\omega_1 + \omega_2)^2\ \vec{i_2} - \omega_1^2\ d\ \vec{i_1}$